QUESTION DE COURS :

Déterminant

- Définition du déterminant.
- Déterminant de la transposée, d'un produit, d'une matrice triangulaire supérieure, puis inférieure.
- Développement d'une matrice par rapport à une colonne ou une ligne.
- Déterminant d'une famille de vecteur (bien faire attention qu'il y ait n vecteurs).

Séries numériques

- Comparaison $u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel n puis APCR, dans le cas réel positif. Complexes ?
- Comparaison $u_n \sim v_n$ dans le cas réel positif. Cas complexe ?
- Démontrer que $\sum\limits_n (u_{n+1} - u_n)$ est de la même nature que (u_n) i.e CV ssi $(u_n)_n$ CV.
- Série géométrique $\sum\limits_n q^n$ avec q complexe.
- Si $\sum\limits_n u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Série de Riemann et cas de CV. Démonstration ?

EXERCICES

- VANDERMONDE
  Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$.

  À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
- FORMULE DE LA COMATRICE
  Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$. On définit $A_{i,j}$ comme la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne. On pose $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} det A_{i,j}$.
  On note $Com(A) = (\Delta_{i,j})_{i,j}$ la comatrice de A.
  1. Calculer $Com(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.
  2. Montrer que $ACom(A)^T = Com(A)^T A = det(A) I_2$.
  3. En déduire que si A est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{detA} Com(A)^T$.
  4. On admet le résultat vrai pour tout entier naturel n.

  La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer son inverse.

— QUELQUES QUESTIONS

1. Comment varie un déterminant si on écrit toutes ses colonnes dans l'ordre inverse ?
2. Donner le déterminant d'une matrice nilpotente : $\exists n \geq 0, A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.
3. Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle d'ordre trois n'est pas inversible. Généraliser à n impair.

— CALCUL DE DÉTERMINANTS

Calculer $P_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculer pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+x \end{bmatrix}$$

— SÉRIE DE LAURENT

À quelle condition sur α et β réels a-t-on convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha ln^\beta(n)}$$

— CONSTANTE D'EULER

Soit $n \geq 1$.

On pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
1. Montrer que $H_n \sim ln(n)$.
2. On pose $a_n = H_n - ln(n)$. Simplifier $a_{n+1} - a_n$, en calculer un équivalent et montrer que $(a_n)_n$ converge.

3. On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
Exprimer S_{2n} en fonction des H_k et calculer sa limite.
En déduire la limite de S_n.

— DÉRIVÉE DE LA SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

Pour quels $q \in \mathbb{C}$ la série $\sum\limits_{n} nq^n$ est-elle définie ?

Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nq^n$.